$n \to \infty$

مثال: $\prod_{n=1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ طريقة ثانية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$

متقاربة حسب ليبنتز   متباعدة توافقية   متقاربة حسب ريمان

$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ متباعد $\Leftarrow$

الجداء متباعد

مبرهنة ديني للتقارب المنتظم:

لتكن $\{f_n\}$ متتالية متزايدة أو متناقصة من التوابع المستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a, b]$

$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$

أو $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots$

إذا كانت $\{f_n\}$ تتقارب نقطياً من التابع المستمر f على المجال $[a, b]$

عندئذٍ $\{f_n\}$ " " منتظماً على المجال $[a, b]$ من التابع f.

مثال: ادرس التقارب النقطي والمنتظم لمتتالية التوابع:

$\{\arctan(nx)\}$

على المجال $[1, 2]$

الحل: المتتالية تتقارب نقطياً من التابع $f(x)=\frac{\pi}{2}$ على المجال $[1,2]$ و المستمر على هذا المجال
جميع التوابع $f_n(x)=\arctan(nx)$ مستمرة على المجال $[1,2]$ من أجل جميع $n\in\mathbb{N}$

توضيح: $\arctan(nx)\le\arctan((n+1)x)$ من أجل $x\in[1,2]$
وهذا لكل $n\in\mathbb{N}$.
يعني أن متتالية التوابع متزايدة وبالتالي متتالية التوابع تتقارب بانتظام على المجال $[1,2]$.

مبرهنة التقريب لفاير شتراس:
ليكن f تابع مستمر على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ عندئذٍ توجد متتالية من كثيرات الحدود تتقارب بانتظام على المجال نحو التابع f.

السلاسل التابعية:
ليكن $\{f_k\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المعرفة على E نعرف السلسلة $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ ونقصد بها المتتالية $\{S_n(x)\}$ (متتالية المجاميع الجزئية) التالية:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

نقول عن السلسلة التابعية $\sum f_k(x)$ أنها متقاربة نقطياً على E إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ تتقارب نقطياً على E وفي هذه الحالة نسمي نهاية $\{S_n(x)\}$ عندما $n\to\infty$ تابع المجموع للسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

* نعرف الباقي النوني $R_n(x)$ للسلسلة التابعية $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ متقاربة نقطياً على E بالشكل:

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

$$= S(x)-S_n(x)$$

المجموع الجزئي النوني ↙ تابع المجموع للسلسلة

- نقول عن السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ إنها متقاربة بانتظام على E إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على E.

مبرهنة: إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على E فإن متتالية التوابع $(f_n(x))$ تتقارب بانتظام على E نحو التابع الصفري.

ملاحظة: إذا كانت متتالية التوابع $(f_n(x))$ لا تتقارب بانتظام من التابع الصفري على E فإن السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ لا تتقارب بانتظام على E.

مبرهنة: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة تابعية متقاربة نقطياً على E عندئذٍ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تتقارب بانتظام على E $\Leftrightarrow$ الباقي النوني $(R_n(x))$ تتقارب بانتظام نحو الصفر على E

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in E} |R_n(x)| = 0$$

مثال: ادرس التقارب المنتظم للسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ على المجال $]-1,1[$

الحل: السلسلة التابعية متقاربة نقطياً على المجال $]-1,1[$ لأنه من أجل أي نقطة من $]-1,1[$ نحصل على سلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ هندسية متقاربة أساسها x (حيث $|x|<1$).

لندرس التقارب المنتظم للسلسلة على $]-1,1[$ من أجل ذلك نأخذ متتالية التوابع $f_n(x)=x^n$ والتي تتقارب نقطياً من التابع $f(x)=0$ على المجال $]-1,1[$.

لنأخذ:

$$M_n = \sup_{x\in]-1,1[} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in]-1,1[} |x^n| = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$$

المتتالية (x^n) لا تتقارب بانتظام على المجال $]-1,1[$ وبالتالي السلسلة $\sum x^n$ لا تتقارب بانتظام على المجال $]-1,1[$.

ملاحظة: $|f_n(x)-f(x)| > \varepsilon > 0$

$x_n \in]-1,1[$

$x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \in]-1,1[$

$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{2} - 0| = \frac{1}{2} > 0$

x_n لا تتقارب بانتظام على المجال $]-1,1[$.